ISSN 1810-0198. Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки

Том 23, № 124 2018

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665

УДК 519.1

РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ СОСЕДЕЙ

© **В. Ф. Молчанов, Е. Е. Крюкова**

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33
E-mail: v.molchanov@bk.ru, e.kryukowa2011@yandex.ru

Аннотация. В настоящей работе мы рассматриваем некоторые задачи из комбинаторного анализа, связанные с размещениями без соседей на графах, а именно, мы находим количества и вероятности таких размещений на простейших графах (отрезок, два отрезка, цикл), а также (это более трудно) такие же задачи для цикла с точностью до поворота.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения; числа Фибоначчи; многочлены Фибоначчи; числа Люка; многочлены Люка

Введение

Пусть Γ – конечный граф с множеством вершин V, без петель и двойных ребер. Пусть $L(V)$ – множество функций на V со значениями 0 и 1, назовем их размещениями. *Размещением без соседей* мы называем такую функцию, что в соседних вершинах она не может одновременно принимать значение 1. Пусть $S(\Gamma)$ – множество таких функций. Для конечного множества A через $|A|$ обозначаем количество элементов в нем. Пусть $n = |V|$.

Предположим, что размещения – *случайные*. Пусть значения 0 и 1 принимаются с вероятностями q и p, соответственно, $q+p=1$. Вероятность $P(f)$ размещения f есть одночлен $q^k p^m$, где k и m – кратности значений 0 и 1, соответственно. Его степень равна $k+m=n$. Пусть A – некоторое множество размещений из $L(V)$. Вероятность $P(A)$ этого множества равна сумме соответствующих одночленов: $P(A) = \sum P(f)$. Эта вероятность есть некоторый многочлен $F(A;\, q,\, p)$ от двух переменных, однородный степени n. Его значение $F(A;\, 1,\, 1)$ при $q=p=1$ (забываем об ограничении $q+p=1$) равно $|A|$.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 3.8515.2017/8.9).

Предположим, что граф Γ является *однородным*, то есть имеется некоторая группа G преобразований этого графа в себя, действующая транзитивно на множестве вершин V. Она сохраняет $S(\Gamma)$. Возьмем в каждой орбите группы G в $S(\Gamma)$ по одному представителю (размещению), получим множество $R(\Gamma)$, назовем его радиальным множеством.

Возникают следующие задачи.

Задача (A). Найти количество $s(\Gamma) = |S(\Gamma)|$ размещений без соседей.

Задача (B). Для однородного графа найти количество $\xi(\Gamma)$ размещений без соседей с точностью до действия группы G. Оно равно количеству орбит группы G в $S(\Gamma)$, или, что все равно, количеству $|R(\Gamma)|$.

Задача (C). Найти вероятность $w(\Gamma)$ того, что случайное размещение является размещением без соседей. Оно равно $F(S(V);\, q,\, p)$.

Задача (D). Для однородного графа найти вероятность $\beta(\Gamma)$ того, что случайное размещение является размещением без соседей с точностью до действия группы G. Оно равно $F(R(\Gamma);\, q,\, p)$.

§ 1. Многочлены Фибоначчи и многочлены, связанные с ними

Напомним, см. [1], что числа Фибоначчи F_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, определяются рекуррентным соотношением $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ и начальными условиями $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Числа Люка L_m, $m = 1, 2, \ldots$, определяются формулой

$$L_m = F_{m-1} + F_{m+1}. \tag{1}$$

Они удовлетворяют такому же рекуррентному соотношению, начальные значения таковы: $L_1 = 1$, $L_2 = 3$. Приведем таблицу

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...
L_n	-	1	3	4	7	11	18	29	47	76	...

Многочленами Фибоначчи $\Phi_n(q,p)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, мы называем следующие однородные многочлены степени n от двух переменных q, p:

$$\begin{aligned}\Phi_n(q,p) &= \sum_{2k \leqslant n+1} \binom{n+1-k}{k} q^{n-k} p^k = \\ &= q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n-1}{2} q^{n-2} p^2 + \binom{n-2}{3} q^{n-3} p^3 + \ldots .\end{aligned} \tag{2}$$

Они удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$\Phi_n(q,p) = q\, \Phi_{n-1}(q,p) + q\, p\, \Phi_{n-2}(q,p). \tag{3}$$

Это вытекает из тождества для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}.$$

Решая конечно-разностное уравнение (3) с начальными условиями $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = q+p$, получаем явный вид:

$$\Phi_n(q,p) = \frac{1}{q} \cdot \frac{\lambda_1^{n+2} - \lambda_2^{n+2}}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(q + \sqrt{q^2+4qp}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(q - \sqrt{q^2+4qp}\right).$$

В частности, при получаем формулу Бине для чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}.$$

Приведем несколько первых многочленов Фибоначчи:

$$\begin{aligned}
\Phi_0(q,p) =& 1\\
\Phi_1(q,p) =& q + p\\
\Phi_2(q,p) =& q^2 + 2qp\\
\Phi_3(q,p) =& q^3 + 3q^2p + q\,p^2\\
\Phi_4(q,p) =& q^4 + 4q^3p + 3q^2\,p^2\\
\Phi_5(q,p) =& q^5 + 5q^4p + 6q^3\,p^2 + q^2\,p^3
\end{aligned}$$

Теперь введем *многочлены Фибоначчи-bis* $A_n(u,v)$, $n = 0, 1, \ldots$. Это – многочлены от u и v степени n по u с такими же коэффициентами, что и у многочленов Фибоначчи Φ_{n-1}, но показатели у переменного u убывают на 2, а именно,

$$\begin{aligned}
A_n(u,v) = \sum_{2k\leqslant n} \binom{n-k}{k} u^{n-2k} v^k =\\
= u^n + \binom{n-1}{1} u^{n-1} v + \binom{n-2}{2} u^{n-4} v^2 + \binom{n-3}{3} u^{n-6} v^3 + \ldots.
\end{aligned}$$

Через многочлены Фибоначчи они выражаются так:

$$A_n(u,v) = u\,\Phi_{n-1}\left(u, \frac{v}{u}\right), \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

Из (3) следует конечно-разностное уравнение для $A_n(u,v)$:

$$A_n(u,v) = u\,A_{n-1}(u,v) + v\,A_{n-2}(u,v) \tag{5}$$

Имеет место следующее равенство:

$$A_n(x+y, -xy) = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}. \tag{6}$$

Это равенство проверяется с помощью конечно-разностного уравнения (5) и начальных условий $A_0 = 1$, $A_1 = u$.

Приведем несколько первых многочленов Фибоначчи-bis:

$$
\begin{aligned}
A_0(u,v) &= 1\\
A_1(u,v) &= u\\
A_2(u,v) &= u^2 + v\\
A_3(u,v) &= u^3 + 2uv\\
A_4(u,v) &= u^4 + 3u^2v + v^2\\
A_5(u,v) &= u^5 + 4u^3v + 3uv^2\\
A_6(u,v) &= u^6 + 5u^4v + 6u^2\,v^2 + v^3
\end{aligned}
$$

Многочленами Люка $\Psi_n(q,p)$, $n = 1, 2, \ldots$, мы называем следующие однородные многочлены степени n от двух переменных q, p:

$$\Psi_n(q,p) = q\,\Phi_{n-1}(q,p) + q^2\,p\,\Phi_{n-3}(q,p). \tag{7}$$

Из (2) находим:

$$\Psi_n(q,p) = \sum_{2k\leqslant n} \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k}\, q^{n-k}\, p^k.$$

Многочлены Люка удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению (3). Решая это уравнение (3) с начальными условиями $\Psi_1 = q$, $\Phi_2 = q^2 + 2qp$, получаем:

$$\Psi_n(q,p) = \lambda_1^n + \lambda_2^n\,.$$

Приведем несколько первых многочленов :

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(q,p) &= q\\
\Psi_2(q,p) &= q^2 + 2qp\\
\Psi_3(q,p) &= q^3 + 3q^2p\\
\Psi_4(q,p) &= q^4 + 4q^3p + 2q^2\,p^2\\
\Psi_5(q,p) &= q^5 + 5q^4p + 5q^3\,p^2\\
\Psi_6(q,p) &= q^6 + 6q^5p + 9q^4\,p^2 + 2q^3\,p^3\\
\Psi_7(q,p) &= q^7 + 7q^6p + 14q^5\,p^2 + 7q^4\,p^3
\end{aligned}
$$

Отметим связь с числами Фибоначчи и Люка:

$$\Phi_n(1,1) = F_{n+2}, \quad \Psi_n(1,1) = L_n.$$

§ 2. Граф «отрезок»

Пусть $\mathbb{N}_n$ есть множество $\{1,2,\ldots,n\}$. Оно есть множество вершин для графа «отрезок» I_n, ребро соединяет вершины k и $k+1$, $1 \leqslant k < n$.

Теорема 1. *Величины $s(I_n)$ и $w(I_n)$ выражаются через числа и многочлены Фибоначчи:*

$$s(I_n) = F_{n+2}, \tag{8}$$

$$w(I_n) = \Phi_n(q,p). \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $a_n = s(I_n)$, $b_n = w(I_n)$. Размещения из $S(I_n)$ – это векторы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с координатами 0, 1, в которых две единицы не могут стоять рядом. Множество $S(I_n)$ распадается на два подмножества: первое состоит из векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$, второе – из векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0, 1)$. Поэтому $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Непосредственно находим $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Вместе с уравнением это доказывает (8). Вероятности указанных выше двух подмножеств равны $q\,b_{n-1}$ и $q\,p\,b_{n-2}$. Поэтому $b_n = q\,b_{n-1} + q\,p\,b_{n-2}$. Непосредственно находим $b_1 = q + p$, $b_2 = q^2 + 2qp$. Вместе с уравнением это доказывает (9). □

§ 3. Граф «цикл»

Граф «цикл» C_n имеет то же самое множество вершин $\mathbb{N}_n$, что и граф I_n из § 2, и он получается из графа I_n добавлением ребра, соединяющего 1 и n.

Теорема 2. *Величины $s(C_n)$ и $w(C_n)$ выражаются через числа и многочлены Люка:*

$$s(C_n) = L_n, \tag{10}$$

$$w(C_n) = \Psi_n(q,p). \tag{11}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $c_n = s(C_n)$, $d_n = \xi(C_n)$, кроме того, используем обозначения a_n и b_n из § 2. Размещения из $S(C_n)$ – это такие же векторы, что и выше в § 2, с запрещением векторов $(1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 1)$. Множество $S(C_n)$ распадается на два подмножества: первое состоит из векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$, второе – из векторов $(0, x_2, \ldots, x_{n-2}, 0, 1)$. Поэтому $c_n = a_{n-1} + a_{n-3}$. Вместе с (8) и определением (1) чисел Люка это доказывает формулу (10).

Вероятности указанных выше подмножеств равны $q\,b_{n-1}$ и $q^2\,p\,b_{n-3}$. Поэтому $d_n = q\,b_{n-1} + q^2\,p\,b_{n-3}$. Непосредственно находим $b_1 = q + p$, $b_2 = q^2 + 2qp$. Вместе с (7) это доказывает формулу (11). □

На цикле C_n действует циклическая группа $\mathbb{Z}_n$ сдвигами $k \mapsto k + s$ по модулю n. Тем самым она действует в множестве $S(C_n)$. Обозначим через Ω множество орбит группы $\mathbb{Z}_n$ в $S(n)$. Возьмем в каждой орбите группы $\mathbb{Z}_n$ в $S(C_n)$ по одному представителю (размещению) h, получим радиальное множество $R(C_n)$. Оно находится во взаимно однозначном соответствии с множеством Ω: $R(C_n) \sim \Omega$.

Нам надо вычислить число элементов в этом множестве и его вероятность, а именно, число $\xi(C_n) = |R(C_n)|$ и многочлен $\beta(C_n)(q,p) = F(R(C_n);\, q,p)$.

Напомним [2] теоретико-числовую функцию Эйлера $\varphi(m)$. Она указывает количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m. Имеет место соотношение

$$\sum_{d\,|m} \varphi(d) = m. \tag{12}$$

Теорема 3. *Имеют место формулы:*

$$\xi(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{d\,|n} \varphi(d)\, L_{n/d}\,.$$

$$\beta(C_n) = \frac{1}{n} \sum_{d\,|n} \varphi(d)\, \Psi_{\,n/d}(q^d\,, p^d). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для делителя r числа n обозначим через $A(r)$ множество функций (размещений) из $S(C_n)$ с *наименьшим* периодом r. Множество $S(C_n)$ есть дизъюнктное объединение $\cup A(r)$, где r пробегает все делители числа n. Группа $\mathbb{Z}_n$ сохраняет каждое множество $A(r)$, она имеет в $A(r)$ несколько орбит. Стационарная подгруппа функции из $A(r)$ есть $r\,\mathbb{Z}_n$, ее порядок равен n/r.

Выше мы уже взяли в каждой орбите из Ω по одной функции h. Подействуем на каждую h всей группой $\mathbb{Z}_n$. Получим отображение M множества $\mathbb{Z}_n \times \Omega$ на всё множество $S(n)$. При этом каждая h, принадлежащая $A(r)$, дает r различных функций из $A(r)$, то есть всё $A(r)$, с кратностью n/r. Таким образом, множество $\mathbb{Z}_n \times \Omega$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством функций из $\cup A(r) = S(C_n)$, взятых с кратностью n/r:

$$\mathbb{Z}_n \times \Omega \sim \bigcup_{r\,|n} A(r) \cdot \frac{n}{r}\,.$$

Из этого равенства получаем равенство чисел и равенство многочленов:

$$n \cdot \xi(C_n) = \sum_{r\,|n} \,|A(r)| \cdot \frac{n}{r}\,, \tag{14}$$

$$n \cdot F(S(C_n);\, q,\, p) = \sum_{r\,|n} \,F(A(r);\, q,\, p) \cdot \frac{n}{r}\,. \tag{15}$$

Применим формулу (12) к множителю n/r в правых частях (14) и (15) и переставим суммирования, мы получим

$$n \cdot \xi(C_n) = \sum_{d\,|n} \varphi(d) \sum_{r\,|\,(n/d)} |A(r)|\,, \tag{16}$$

$$n \cdot F(S(C_n);\, q,\, p) = \sum_{d\,|n} \varphi(d) \sum_{r\,|\,(n/d)} F(A(r);\, q,\, p)\,. \tag{17}$$

Объединение $T(m)$ множеств $A(r)$, для которых r делит делитель m числа n, состоит из функций с периодом m (не обязательно наименьшим). Всякая функция из $T(m)$

полностью определяется своими значениями в вершинах $\{1, 2, \ldots, m\}$, так что множество $T(m)$ получается из функций из $S(C_m)$ заменой q и p на $q^{n/m}$ и $p^{n/m}$, соответственно, и потому вероятность множества $T(m)$ равна вероятности $\Psi_m(q^{n/m}, p^{n/m})$, а количество $|T(m)|$ функций равно числу Люка L_m. Поэтому внутренняя сумма в (16) есть $L_{n/d}$, а внутренняя сумма в (17) есть $\Psi_{n/d}(q^d, p^d)$, что и доказывает теорему. $\square$

П р и м е р 1. Граф C_6.

Количество размещений без соседей равно числу Люка $L_6 = 18$. Делители числа 6 – это числа $1, 2, 3, 6$. Значения на них функции Эйлера таковы: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(6) = 2$. Имеется 5 орбит группы $\mathbb{Z}_6$:

$$
\begin{aligned}
&000000 \quad (r = 1);\\
&010101, 101010 \quad (r = 2);\\
&001001, 100100, 010010 \quad (r = 3);\\
&000101, 100010, 010001, 101000, 010100, 001010 \quad (r = 6);\\
&000001, 100000, 010000, 001000, 000100, 000010 \quad (r = 6).
\end{aligned}
$$

В качестве представителей можно взять функции, стоящие на первом месте. Далее используются следующие многочлены Люка:

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(q, p) =& q\\
\Psi_2(q, p) =& q^2 + 2qp\\
\Psi_3(q, p) =& q^3 + 3q^2p\\
\Psi_6(q, p) =& q^6 + 6q^5p + 9q^4 p^2 + 2q^3 p^3.
\end{aligned}
$$

Многочлен $\beta(C_6)(q, p) = F(R(C_6); q, p)$ есть

$$\beta(C_6)(q, p) = q^6 + q^5p + 2q^4 p^2 + q^3 p^3.$$

Равенство (13) есть

$$\beta(C_6)(q, p) = \frac{1}{6}\left\{\Psi_6(q, p) + \Psi_3(q^2, p^2) + 2 \cdot \Psi_2(q^3, p^3) + 2 \cdot \Psi_1(q^6, p^6)\right\}$$

§ 4. Граф «два отрезка»

Граф «два отрезка» K_n состоит из двух экземпляров отрезка I_n, см. § 2, соответствующие вершины (с одним и тем же номером) соединены ребром. Вершины занумерованы парами (k, i), где $k = 1, \ldots, n$, $i = 1, 2$. Ребра соединяют (k, i) с $(k + 1, i)$, $k < n$, а также $(k, 1)$ с $(k, 2)$. Поэтому размещение f на K_n есть двустрочная матрица $(f_{k,i})$, элементы которой есть 0 или 1.

Теорема 4. *Последовательность $s(K_n)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ с начальными условиями $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, явные выражения таковы*

$$s(K_n) = \sum_{2k \leqslant n} \binom{n}{2k} 2^k. \tag{18}$$

Числа $w(K_n)$ выражаются через многочлены Фибоначчи и Фибоначчи-bis:

$$w(K_n) = q^n \Big\{ \Phi_{n-1}(1,qp) + p\, \Phi_{n-2}(1,qp) \Big\}, \quad n \geqslant 2, \tag{19}$$

$$= q^n \Big\{ A_n(1,qp) + p\, A_{n-1}(1,qp) \Big\}. \tag{20}$$

Доказательство. Введем еще один граф K_n', он получается из графа K_n удалением одной крайней вершины: $(n,1)$ или $(1,n)$, – и выходящих из нее двух ребер. Обозначим $x_n = s(K_n)$, $y_n = s(K_n')$. Возьмем размещение f из $S(K_n)$. Если $f_{n,1} = 0$, то оставшаяся после удаления этого элемента матрица принадлежит $S(K_n')$. Если же $f_{n,1} = 1$, то должно быть $f_{n,2} = 0$, $f_{n-1,1} = 0$ и оставшаяся после удаления этих трех элементов матрица принадлежит $S(K_{n-1}')$. Поэтому $x_n = y_n + y_{n-1}$. Пусть теперь $f \in S(K_n')$. Если $f_{n,2} = 0$, то оставшаяся после удаления этого элемента матрица принадлежит $S(K_{n-1})$. Если же $f_{n,2} = 1$, то должно быть $f_{n-1,2} = 0$ и оставшаяся после удаления этих двух элементов матрица принадлежит $S(K_{n-1}')$. Поэтому $y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$. Подставим в это уравнение найденное ранее значение: $x_{n-1} = y_{n-1} + y_{n-2}$, получим $y_n = 2y_{n-1} + y_{n-2}$. Точно такое же уравнение

$$x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$$

справедливо для x_n, поскольку x_n выражается линейно через y_n. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Непосредственное вычисление дает $x_1 = 3$, $x_2 = 7$, поэтому

$$x_n = \frac{1}{2} \left(\lambda_1^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \right),$$

отсюда получаем (17).

Обозначим теперь $w_n = w(K_n)$, $z_n = w(K_n')$. Рассуждая, как и выше, получаем систему

$$w_n = q z_n + q^2 p z_{n-1}$$
$$z_n = q w_{n-1} + q p z_{n-1}.$$

Исключая w_{n-1} из второго уравнения с помощью первого, получаем конечно-разностное уравнение для z_n. Точно такое же уравнение

$$w_n = q(q+p) w_{n-1} + q^3 p w_{n-2} \tag{21}$$

справедливо для w_n, поскольку w_n выражается линейно через z_n. Здесь удобно ввести новое переменное b_n:

$$w_n = q^n b_n, \tag{22}$$

тогда (21) превращается в уравнение

$$b_n = (q+p)\, b_{n-1} + qp\, b_{n-2}. \tag{23}$$

Для $n = 1$ и $n = 2$ мы вычисляем непосредственно:

$$w_1 = q^2 + 2qp, \quad w_2 = q^4 + 4q^3 p + 2q^2 p^2,$$

тогда с (21) согласуется значение $w_0 = 1$. Для уравнения (23) характеристическое уравнение есть $\lambda^2 - (q+p)\lambda - qp = 0$, оно имеет корни

$$\lambda_1 = \frac{q+p+\sqrt{(q+p)^2+4qp}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{q+p-\sqrt{(q+p)^2+4qp}}{2}.$$

Учитывая начальные условия $b_0 = 1$, $b_1 = q + 2p$, получаем

$$b_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} + p\,\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Рассмотрим отдельно

$$t_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,.$$

Вспоминая (6), получаем

$$t_n = A_n(q+p, qp).$$

Итак,

$$b_n = A_n(q+p, qp) + pA_{n-1}(q+p, qp).$$

Возвращаясь к w_n по формуле (22), получим выражение чисел $w(K_n)$ через многочлены Фибоначчи-bis:

$$w(K_n) = q^n \Big\{ A_n(q+p, qp) + p\,A_{n-1}(q+p, qp) \Big\}.$$

Вспомним, наконец, соотношение $q + p = 1$ и соотношение $A_n(1, v) = \Phi_{n-1}(1, v)$, см. (4), окончательно получим (19) и (20). $\square$

Уравнение (23) дает уравнение для t_n:

$$t_n(q,p) = (q+p)\,t_{n-1}(q,p) + qp\,t_{n-2}(q,p)\,.$$

Из него следует, что коэффициенты многочленов $t_n(q,p)$ образуют любопытный арифметический треугольник – каждое число есть сумма *трех* над ним стоящих (одно справа, одно слева, одно сверху):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 13 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 25 & & 25 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 11 & & 41 & & 63 & & 41 & & 11 & & 1
\end{array}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Райзер Г.Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.
2. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1952.

Поступила в редакцию 13 апреля 2018 г.
Прошла рецензирование 18 мая 2018 г.
Принята в печать 26 июня 2018 г.
Конфликт интересов отсутствует.

Молчанов Владимир Федорович, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Крюкова Екатерина Евгеньевна, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, магистрант по направлению подготовки «Математика», e-mail: e.kryukowa2011@yandex.ru

Для цитирования: *Молчанов В.Ф., Крюкова Е.Е.* Размещения без соседей // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. Тамбов, 2018. Т. 23. № 124. С. 655–665. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665

PLACEMENTS WITHOUT NEIGHBOURS

V. F. Molchanov, E. E. Kryukova

Tambov State University named after G.R. Derzhavin
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
E-mail: v.molchanov@bk.ru, e.kryukowa2011@yandex.ru

Abstract. In this paper we consider some problems in combinatorial analysis related to placements without neighbours on graphs, namely, we find numbers and probabilities of such placements for simplest graphs (segment, two segments, cycle), and also (which is more difficult) we solve the same problems for a cycle up to rotations.
Keywords: recurrence relations; Fibonacci numbers; Fibonacci polynomials; Lucas numbers; Lucas polynomials

REFERENCES

1. Raiser G.J. *Kombinatornaya matematika* [Combinatorial Mathematics]. Moscow, Mir Publ., 1966.

2. Vinogradov I.M. *Osnovy teorii chisel* [Fundamentals of Number Theory]. Moscow, Leningrad, State Publ. of Technical and Theoretical Literature, 1952.

Received 13 April 2018
Reviewed 18 May 2018
Accepted for press 26 June 2018
There is no conflict of interests.

Molchanov Vladimir Fedorovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Functional Analysis, e-mail: v.molchanov@bk.ru

Kryukova Ekaterina Evgenievna, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Masters Degree Student on Training Direction «Mathematics», e-mail: e.kryukowa2011@yandex.ru

For citation: Molchanov V.F., Kryukova E.E. Razmeshcheniya bez sosedey [Placements without neighbours]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 655–665. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-655-665 (In Russian, Abstr. in Engl.).

The work is supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project № 3.8515.2017/8.9).